数理解析研究所講究録
第1898巻 2014年 140-145

An inverse problem for a class of canonical systems

東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻　鈴木正俊 (Suzuki, Masatoshi)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1. はじめに

RIMS 研究集会で発表した内容は, すでに [8] にまとめてあり, そこへ至る動機や経緯なども [6, 7] などに書いた. そういった理由から, [8] の survey のような記事を書くのには気が進まなかった. そこで, 今回も [7] に引き続き「講究録作成上の注意 [1]」に甘えて, [8] に関係してはいるが, まだはっきりとした結果の出ていない未解決の事柄について少し述べることとした. つまり, この記事に結果と言えるものは何もないが, [6, 7] を読んで正準系に興味をもって下さった方になら, 少しは楽しんで頂けるかもしれない.

もう一つ冒頭で注意しておくと, [7, §8] では符号が真逆な箇所が幾つかあったので, この記事の最後に正誤表を掲載しておくことにした. それで悩ませてしまった方々にはここでお詫びします.

2. 概略

講演の際に述べた主結果 ([8] の主結果) は, ある種の指数多項式に対して, 擬正準系と呼ばれる微分方程式系とその解が具体的に構成できるというものであった. そして, それを自己相反多項式の根の分布へ応用すると, 自己相反多項式の根がすべて単位円周上の単根であることの必要十分条件が得られたのであった. しかし, その応用では, 擬正準系が正準系とならない場合には, 自己相反多項式の根に関する情報がまったく引き出せていなかった. そこで, この記事では, 擬正準系のハミルトニアン (§3) と自己相反多項式の根の分布との関係について, 考察・実験したことを述べる. 考察のかなめは, 自己相反多項式に正準系を対応させる [8] の方法と, 多項式に二次形式を対応させる古典的手法の比較である.

3. 正準系と擬正準系

まず, 擬正準系と正準系の定義を復習する. 実軸上の半開区間 $I=[a_1,a_0)$ $(-\infty<a_1<a_0\leqslant\infty)$ 上で定義され, 2次の実対称行列に値をとる行列値函数 $H:I\to \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ に対し, $z\in\mathbb{C}$ でパラメーター付けされた一階常微分方程式系

$$-a\frac{\partial}{\partial a}\begin{bmatrix}A(a,z)\\B(a,z)\end{bmatrix}=z\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}H(a)\begin{bmatrix}A(a,z)\\B(a,z)\end{bmatrix}\quad(a\in I,\ z\in\mathbb{C})$$

に右端点での条件

$$\lim_{a\nearrow a_0}(A(a,z),B(a,z))=(1,0)$$

を考え合わせたものを (I 上の) 擬正準系 (quasi-canonical system) と呼ぶ. ただし, 擬正準系という用語は一般的なものではなく, 筆者の造語にすぎないことを注意しておく.

さらに, 擬正準系が正準系 (canonical system) であるとは, 2次実対称行列 $H(a)$ がほとんど全ての $a\in I$ について半正定値であり, ルベーグ測度が正のすべての開区間 $J\subset I$ 上で $H\not\equiv 0$ で, しかも, $H(a)$ の各成分が I 上で局所可積分なことをいう. 擬正準

[1]「萌芽的アイディアの紹介, 未解決問題の提起, 意味ありと思われる失敗の報告, 理論の背景にある哲学あるいは実験結果, 将来の展望等, その形態の故に, 一般の (数理科学の) 学術誌への投稿になじまないものも (研究代表者が学術的価値ありと判断する限り) 歓迎します.」という一文.

系とは異なり，正準系は一般的な用語である．正準系における行列値函数 $H(a)$ を，その正準系のハミルトニアンと呼ぶ．用語の乱用だが，この記事においては，擬正準系に対しても $H(a)$ をハミルトニアンと呼ぶことにする．

さて，正準系の一般論から，与えられた正準系に対して，解 $(A(a,z),B(a,z))$ が一意に存在すること，および，ほとんどすべての $a\in I$ に対して，$A(a,z)$ と $B(a,z)$ は z の函数として整函数であることが知られている．さらに，z の函数として，$A(a,z)$ と $B(a,z)$ の零点は，実軸上で交互に現れる単純零点で尽きることも知られている．

こういった解 $(A(a,z),B(a,z))$ に対する著しい性質は，ハミルトニアン $H(a)$ の半正定値性に由来する．

いっぽう，正準系ではない擬正準系に対しては，解 $(A(a,z),B(a,z))$ の存在や一意性からして，一般論があるのかないのかよく分からない．少なくとも筆者はそれらしい文献を見つけられなかった．そういった状況であるから，擬正準系の解が z の函数としてどういった性質を持つべきなのかもよく分かっていないと思われる．

しかしながら，自己相反多項式との関連で擬正準系について考えると，擬正準系の解 $(A(a,z),B(a,z))$ に対しても何らかの良い一般論がありそうに思える．そういったことを，これから追々述べていく．

4. 自己相反多項式と擬正準系

つぎに，自己相反多項式の根の分布と擬標準系との関連について述べる．自己相反多項式 (self-reciprocal polynomial) とは，実係数の多項式 $P(x)$ で，自己相反方程式 $P(x)=x^nP(1/x)$ $(n=\deg P)$ を満たすものを指す．

自己相反方程式から，自己相反多項式の根は単位円周上にあるか，単位円周に対して対称に分布していることがわかる．奇数次の自己相反多項式は $(x+1)$ のベキと偶数次の自己相反多項式の積に書けるから，以下では偶数次の自己相反多項式のみを考える事とし，$2g$ 次の自己相反多項式を $P_g(x)$ で表す．

さて，自己相反多項式 $P_g(x)$ と $q>1$ を一つ固定して

$$A_q(z):=q^{-giz}P_g(q^{iz}),\qquad B_q(z):=-\frac{d}{dz}A_q(z)$$

とおく．このとき，[8] の Theorem 1.1 を $E_q(z):=A_q(z)-iB_q(z)$ に適用すると，半開区間 $[1,q^g)$ 上の擬正準系で，その解 $(A(a,z),B(a,z))$ が

$$A(1,z)=A_q(z),\qquad B(1,z)=B_q(z)$$

を満たすものが構成できる．さらに，そのように構成された擬正準系が正準系であることと，$P_g(x)$ の根がすべて単位円周上の単根であることが同値なことが示される ([8, Theorem 1.4])．ここで，[8] で構成された $E_q(z)=A_q(z)-iB_q(z)$ に対応する擬正準系のハミルトニアンは $\mathrm{diag}(\gamma_q(a)^{-1},\gamma_q(a))$ という形をしており，ハミルトニアンの半正定値性は $\gamma_q(a)$ の非負性として述べられることに注意しておく．

ともあれ，このようにして，自己相反多項式と擬正準系が関係付けられ，自己相反多項式の根の分布と正準系が関係付けられる．しかしながら，自己相反多項式が単位円の外に根をもつ場合は，ハミルトニアンの性質と多項式の根の分布の関係は明らかでない．

いっぽう，[7, §8] で注意したことによれば，自己相反多項式に対応する擬正準系のハミルトニアンは，まったく別の手法で自己相反多項式と関係するある二次形式に類似した性質をもつ．それから推測すると，自己相反多項式の根の分布は，擬正準系のハミルトニアンの対角成分 $\gamma_q(a)$ の符号変化と関係しているのではないかと思われる．これについて更に述べるために，多項式の根の分布と二次形式の関連について述べよう．

5. 多項式の根の分布と二次形式

多項式 $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ の全ての根が単位円周上にあるためには, $P(x)$ が self-inversive (即ち, $P(x) = x^n\overline{P(1/\bar{x})}$ $(n = \deg P)$) かつ $P'(x)$ の全ての根が単位円内部にある事が必要十分である (Cohn [2]). 一方, 多項式 $P(x)$ が self-inversive なら, $P(x)$ の単位円周上の重根を除いて, $P'(x)$ は単位円周上に根をもたない ([5, Lemma (45.2)]). したがって, self-inversive な多項式 $P(x)$ の全ての根が単位円周上の単根であるためには, $P'(x)$ の根が全て単位円の内部にあることが必要十分である. これらの事から, 多項式の単位円周上の根を調べる際にも, 単位円内部にある根を調べることが重要だと分かる.

多項式の単位円内部にある根の個数は, 多項式からつくられたある二次形式 (対称行列) の性質から調べることができる. m 次多項式 $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m \in \mathbb{C}[x]$ に対し, 実多項式 $U(x)$, $V(x)$ を

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(x+i)^{m-k}(x-i)^k = U(x) + iV(x)$$

で定める. このとき $h_{p,q} \in \mathbb{R}$ を

$$\frac{U(x)V(y) - U(y)V(x)}{x-y} = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} h_{p,q}x^{m-p}y^{m-q} \tag{5.1}$$

で定めると

$$H(f) := (h_{p,q})_{1 \leqslant p,q \leqslant m}$$

は実対称行列である. そして, $H(f)$ の階数が m のとき, その符号数を (p, q), $\sigma = p - q$ とすれば, $f(x) = 0$ の根の中で, 単位円内部にあるものの数は $(m+\sigma)/2$ 個, 外部にあるものの数は $(m-\sigma)/2$ 個である. $H(f)$ の階数が m 未満でも, σ は $f(x) = 0$ の根の中で単位円の内部にあるものの数と外部にあるものの数の差に等しい ([9, §75, 問題 5]). さらに, 次の事実が知られている.

定理 1. m 次多項式 $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m \in \mathbb{C}[x]$ に対し, $2m \times 2m$ 行列 $D_m(f)$ を $f(x)$ と $f^\sharp(x) = \overline{x^m f(1/x)}$ の終結式とする:

$$D_m(f) = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m \\
\hline
\bar{a}_m & \bar{a}_{m-1} & \cdots & \cdots & \bar{a}_0 & & & \\
 & \bar{a}_m & \bar{a}_{m-1} & \cdots & \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \bar{a}_m & \bar{a}_1 & \cdots & \cdots & \bar{a}_0
\end{array}\right].$$

さらに, $D_m(f)$ の m 行と $2m$ 行, および m 列と $2m$ 列を除いて $2(m-1) \times 2(m-1)$ 行列 $D_{m-1}(f)$ を作り, $D_{m-1}(f)$ から同じようにして $D_{m-2}(f)$ を作り, これを繰り返して

$$D_2(f) = \left[\begin{array}{cc|cc}
a_0 & a_1 & a_m & \\
 & a_0 & a_{m-1} & a_m \\
\hline
\bar{a}_m & \bar{a}_{m-1} & \bar{a}_0 & \\
 & \bar{a}_m & \bar{a}_1 & \bar{a}_0
\end{array}\right], \quad D_1(f) = \begin{bmatrix} a_0 & a_m \\ \bar{a}_m & \bar{a}_0 \end{bmatrix}$$

に至るものとする. このとき, $H(f)$ の k 次主小行列式を $h_k(f)$ とすれば,

$$h_k(f) = \det D_k(f).$$

さらに, $\det D_k(f) \neq 0$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ ならば,

$$1, -\det D_1(f), \det D_2(f), \cdots, (-1)^m \det D_m(f)$$

の符号変化の回数を p とするとき, $f(x)$ は単位円の内部に p 個の根をもち, 単位円周上に根を持たない. 特に, $\det D_k(f) > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ ならば, $f(x)$ の根はすべて単位円の内部にある.

Proof. Marden [5, §43, Th. (43,1), Exercise 2; §45, Exercise 3] および [9, §75, 問題 4, 問題 5] を見よ. □

以上のことを自己相反多項式 $P_g(x)$ に適用すると, $P_g(x)$ のすべての根が単位円周上の単根であるためには, $2g-1$ 次実対称行列 $H(P_g')$ が正定値であることが必要かつ十分だと分かる. したがって $H(P_g')$ の主小行列式 $h_k(P_g')$ たちを調べればよい.

もし, $h_k(P_g') > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant 2g-1)$ ならば, $H(P_g')$ は正定値であるが, そうでない場合でも, $P_g(x)$ の根についての情報が $h_k(P_g')$ から得られる.

例えば, $h_k(P_g') \neq 0$ $(1 \leqslant k \leqslant 2g-1)$ であり, しかも $1, -h_1(P_g'), h_2(P_g'), \cdots, -h_{2g-1}(P_g')$ の符号変化の回数が $2g-1$ 未満ならば, $P_g'(x)$ は単位円周上に根を持たない. さらに, このとき $H(P_g')$ は正定値でないので, $P_g(x)$ は単位円の外に少なくとも一つの根をもつか, 単位円周上に少なくとも一つの重根をもつ. もし, $P_g(x)$ が単位円周上に少なくとも一つの重根をもてば, $P_g'(x)$ は単位円周上に根をもつから, これは仮定に反する. したがって, $P_g(x)$ は単位円の内部と外部に少なくとも一つの根をもち, 単位円周に根があるとしても, それは単根である.

なお, $P_g(x)$ の自己相反性から, $H(P_g) = 0$ であるので, $H(P_g)$ を考えても $P_g(x)$ の根に関しては何の情報も得られない.

6. 自己相反多項式と正準系

さて, 二次形式から正準系に話を移そう. 唐突だが, 正準系は de Brange 空間と呼ばれる, 整函数のなすある再生核 Hilbert 空間と表裏一体の関係にあることが知られている ([1, 4]). 例えば, $E_q(z) = A_q(z) - iB_q(z)$ に対応する $[1, q^g)$ 上の擬正準系が正準系であるとき, その正準系には

$$K(z,w) = \frac{\overline{A_q(w)}B_q(z) - \overline{B_q(w)}A_q(z)}{\pi(z-\bar{w})} \tag{6.1}$$

を再生核とする de Brange 空間が対応する. ここで, 整関数 $F(z)$ について $F^\sharp(z) = \overline{F(\bar{z})}$ とおいた. さらに, [3, Lemma 2.1](または [8, Proposition 5.3]) によれば,

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi}\int_1^{q^g} \begin{bmatrix}\overline{A(a,w)} & \overline{B(a,w)}\end{bmatrix} H_q(a) \begin{bmatrix}A(a,z)\\ B(a,z)\end{bmatrix} \frac{da}{a} \tag{6.2}$$

が成り立つ. この例のように, de Brange 空間の再生核は, 対応する正準系の解とハミルトニアンにより表示できる.

さて, ここで (5.1), (6.1), (6.2) を見比べてみる. 筆者には, これらは似た形をしているように見えるから, 二次形式 $H(f)$ とハミルトニアン $H_q(a)$ も似たものに思えてくる. とはいえ, 先ほど $P_g(x)$ の根の分布を考えたときは, 二次形式 $H(P_g')$ を調べたので, (5.1)

と (6.1) との比較でみると, $H(P_g')$ と $H_q(a)$ が似ている感じで, ちょっとしっくりこない感じもする. そこで, より妥当そうな $H(f)$ と $H_q(a)$ の類似性について考えてみる.

すこし考えると, $P_g(x)$ のすべての根が単位円周上の単根であることは, $A_q(z)$ のすべての零点が実軸上の単純零点であることと同値であり, それは $E_q^\sharp(z)=A_q(z)+iB_q(z)$ の零点がすべて上半平面 $\Im(z)>0$ 内にあることと同値なことが分かる. さらに, $E_q^\sharp(z)$ の零点がすべて上半平面内にあることと, 多項式

$$f_q(x)=(1-g\log q)P_g(x)+xP_g'(x)\log q$$

の根がすべて単位円内部にあることは同値であることが分かる.

これらのことを踏まえると, $f_q(x)$ から§5 のようにして $H(f_q)$ をつくり, その主小行列式 $h_k(f_q)$ たちを調べれば, $P_g(x)$ のすべての根が単位円周上にあるか否かが判定できる. 上でつくった $f_q(x)$ は, $E_q^\sharp(z)$ を多項式の言葉に直しただけのものだから, (5.1) と (6.1) の類似性を通して, 二次形式 $H(f_q)$ とハミルトニアン $H_q(a)$ が似ているというなら, $H(P_g')$ と $H_q(a)$ の場合よりもっともらしく思える.

しかしながら, ぼんやりしたことばかり言っていても埒が明かないので, 少し計算してみよう. [8] の方法により $E_q(z)=A_q(z)-iB_q(z)$ と対応する $[1,q^g)$ 上の擬正準系のハミルトニアンは, $H_q(a)=\mathrm{diag}(\gamma_q(a)^{-1},\gamma_q(a))$ という形をしており, $\gamma_q(a)$ は $P_g(x)$ の係数から定まるある $2g+1$ 個の量 $\delta_0(P_g)=1$, $\delta_n(P_g)$ $(1\leqslant n\leqslant 2g)$ により定まる局所定数函数である:

$$\gamma_q(a)=\frac{1}{g\log q}\delta_{n-1}(P_g)\delta_n(P_g)\quad (q^{(n-1)/2}\leqslant a<q^n,\ 1\leqslant n\leqslant 2g).$$

例えば, $g=2$, $P_2(x)=c_0x^4+c_1x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$ のとき,

$$\delta_2(P_2)=\frac{4c_0+c_1}{4c_0-c_1},\quad \delta_3(P_2)=\frac{8c_0^2-2c_1^2+4c_0c_2}{8c_0^2+c_1^2-4c_0c_2},\quad \delta_4(P_2)=\frac{2c_0+2c_1+c_2}{2c_0-2c_1+c_2}$$

である. これらの計算法も [8] による. 他方, 定理 1 を用いて $h_k(f_q)$ を計算してみると,

$$\begin{aligned}
h_1(f_q)&=1\cdot 4c_0^2(2\log q),\\
h_2(f_q)&=(4c_0-c_1)(4c_0+c_1)\cdot c_0^2(2\log q)^2,\\
h_3(f_q)&=(8c_0^2-2c_1^2+4c_0c_2)(8c_0^2+c_1^2-4c_0c_2)\cdot c_0^2(2\log q)^3,\\
h_4(f_q)&=(2c_0+2c_1+c_2)(2c_0-2c_1+c_2)(8c_0^2+c_1^2-4c_0c_2)^2\cdot c_0^2(2\log q)^4
\end{aligned}$$

である. これらを比べてみれば, $H(f_q)$ と $H_q(a)$ に類似性がありそうな様子は, より明白であろう. 式をコンパクトにまとめられないので書かないが, $g=3,4,5$ くらいまで計算してみても, 同様の様子が観察される. では, 前節で扱った $H(P_g')$ は $H_q(a)$ と全く無関係なのかというと, [7, §8] で述べた如くそんなことはない. 実際,

$$h_k(f_q)=h_{k-1}(P_g')\cdot q_k\,c_0^2(\log q)^k\quad (0<q_k\in\mathbb{Q})$$

といった関係が具体的計算により観察される. 例えば, $g=2$ のとき,

$$\begin{aligned}
h_1(P_2')&=(4c_0-c_1)(4c_0+c_1),\\
h_2(P_2')&=(8c_0^2-2c_1^2+4c_0c_2)(8c_0^2+c_1^2-4c_0c_2)\cdot 2^2,\\
h_3(P_2')&=(2c_0+2c_1+c_2)(2c_0-2c_1+c_2)(8c_0^2+c_1^2-4c_0c_2)^2\cdot 2^4.
\end{aligned}$$

以上のような, 二次形式 $H(f_q)$ の主小行列式たちとハミルトニアン $H_q(a)$ の値の類似性を見ると, 先の $H(P_g')$ の主小行列式たちの場合のように, $H_q(a)$ は正定値でなくとも, その値の変化から $P_g(x)$ の根の情報を引き出せるのではないかと思える. そこで, $\gamma_q(a)$

の値の変化と $P_g(x)$ の根の分布の間の関係を数値実験により観察してみると, つぎのような結果が推察される.

予想 自己相反多項式 $P_g(x)$ に対し, その係数から [8, (1.12)] により定まる $2g$ 個の量を $\delta_n(P_g)$ $(1 \leqslant n \leqslant 2g)$ とし, $\delta_0(P_g)=1$ とする. もし $\delta_n(P_g) \neq \infty$ $(1 \leqslant n \leqslant 2g)$ なら, $P_g(x)$ は重根を持たず, 単位円周上にある (単) 根の個数は

$$\sum_{n=1}^{2g} \mathrm{sign}(\delta_{n-1}(P_g)\delta_n(P_g)) \tag{6.3}$$

に等しい. また, ある n について $\delta_n(P_g)=\infty$ なら, $P_g(x)$ は重根をもつ.

この予想はなかなか綺麗な形をしているし, 少なくとも見た目上は, 二次形式についての公式[9, p.359, (1)] に酷似しているので, たぶん正しいと思う. もし, ちゃんと証明できれば, 自己相反多項式に対応する擬正準系のハミルトニアンにも, 正準系の場合のようにはっきりとした意味がつく. そうすれば, それを手がかりに, 解 $(A(a,z),B(a,z))$ をもつ $[a_1,a_0)$ 上の (適当な条件を満たす) 擬正準系に対して, $(A(z),B(z))=(A(a_1,z),B(a_1,z))$ や, その他の固定された $a \in I$ に対する $(A(a,z),B(a,z))$ の零点分布の情報を, そのハミルトニアン $H(a)$ の値の変化から引き出すことが可能になるかもしれない.

こいうったことについて, 私より早く真実を見抜かれた方がおられましたら, 是非私に御教示下さい. 最後に, このような駄文を最後まで読んで下さった方々に感謝します.

付録: [7, p.133] の正誤表

行	誤	正
8行目	$(-1)^k \det D_k(Q) > 0$	$\det D_k(Q) > 0$
12行目, 20行目	$(-1)^k \det D_k(P_g') > 0$	$\det D_k(P_g') > 0$
14行目	$-\det D_1(P_2')$	$\det D_1(P_2')$
16行目	$-\det D_3(P_2')$	$\det D_3(P_2')$

References

[1] L. de Branges, Hilbert spaces of entire functions, *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.* 1968.

[2] A. Cohn, Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise, *Math. Z.* **14** (1922), no. 1, 110–148.

[3] H. Dym, An introduction to de Branges spaces of entire functions with applications to differential equations of the Sturm-Liouville type, *Advances in Math.* **5** (1970),395–471.

[4] J. C. Lagarias, Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions, *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, 365–377, *Springer, Berlin*, 2006.

[5] M. Marden, Geometry of polynomials, Second edition, Mathematical Surveys, No. 3, *American Mathematical Society, Providence, R.I.*, 1966.

[6] ———, 自己相反多項式と微分方程式の標準系, 解析的整数論 – 数論的関数の多重性に関連して, 176–185, 数理研講究録 No.1806, RIMS, 2012.

[7] ———, 自己相反多項式の零点と微分方程式, 解析的整数論とその周辺 – 近似と漸近的手法を通して見た数論, 125–134, 数理研講究録 No.1874, RIMS, 2014 .

[8] ———, An inverse problem for a class of canonical systems and its applications to self-reciprocal polynomials, preprint, `http://arxiv.org/abs/1308.0228`

[9] 高木貞治, 代数学講義, 共立出版, 1965.